УДК 51

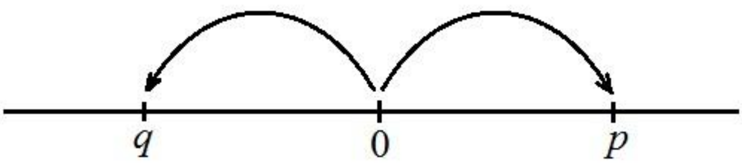
ЗАДАЧА О ЛИДЕРЕ

© И.Ю. Новиков

Аннотация. Рассмотрены игра с бросанием монеты, нахождение математического ожидания выигрыша каждого игрока, а также математическое ожидание выигрыша лидера. Изучены случаи бросания как правильной, так и неправильной (фальшивой) монеты. Сделаны выводы о том, что лидерство в игре меняется значительно реже, чем подсказывает интуиция. Как бы длинны ни были серии бросаний, вероятнее всего, что смены лидерства вообще не произойдет и одна смена лидерства более вероятна, чем две, а две смены вероятнее, чем три и т. д.
Ключевые слова: случайное блуждание частицы; средний выигрыш; сумма степеней; математическое ожидание; треугольник Паскаля; формула бинома Ньютона

§1. Средний выигрыш игрока

Двое играют в орлянку с вероятностями p и q, где p – выигрыш первого игрока, q – выигрыш второго игрока ($p + q = 1$). Капитал обоих игроков неограничен. Эту игру можно представить как блуждание частицы по целым точкам прямой с вероятностями перехода p вправо, q влево, так что координата точки есть выигрыш первого игрока.



Пусть x_n – координата частицы, сделавшей n шагов. Это – случайная величина. Найдем ее математическое ожидание Mx_n.

Распределение величины x_n:

$-n$	$-n+2$	$-n+4$	. . .	$n-4$	$n-2$	n
$\binom{n}{0}p^0q^n$	$\binom{n}{1}p^1q^{n-1}$	$\binom{n}{2}p^2q^{n-}$	. . .	$\binom{n}{n-2}p^{n-2}q^2$	$\binom{n}{n-1}p^{n-1}q^1$	$\binom{n}{n}p^nq^0$

Это распределение есть функция

$$-n+2k \to \binom{n}{k} p^k q^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n$$

Поэтому

$$Mx_n = \sum_{k=0}^{n} (-n+2k) \binom{n}{k} p^k q^{n-k} =$$

$$= -n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + 2 \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad (1.1)$$

Первая сумма равна 1 по формуле бинома Ньютона, так как $p + q = 1$. Вторая сумма есть математическое ожидание числа успехов в n испытаниях Бернулли. Как известно, оно равно np [1–3]. Поэтому

$$Mx_n = -n + 2np = n(2p - 1) = n(p - q)$$

Итак,

$$Mx_n = n(p - q) \qquad (1.2)$$

Таким образом, средний выигрыш первого игрока равен $n(p - q)$. В частности, если $p = q = 1/2$, то $Mx_n = 0$.

§2. Средний выигрыш лидера. Честная монета ($p = q = 1/2$)

Средний выигрыш лидера есть $A_n = M|x_n|$. Используя (1.1) получаем, что

$$M|x_n| = \sum_{k=0}^{n} |n - 2k| \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad (2.1)$$

Найдем явную формулу $M|x_n|$. Сначала мы рассмотрим $p = q = 1/2$. Тогда

$$M|x_n| = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} |n - 2k| \binom{n}{k}$$

Обозначим

$$u_n = \sum_{2k<n} |n - 2k| \binom{n}{k} \qquad (2.2)$$

Тогда

$$M|x_n| = \frac{1}{2^{n-1}} u_n \qquad (2.3)$$

Составим треугольник Паскаля

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

….. ….. ….. ….. ….. ….. ….. ….. ….. ….. ….. ….. …..

Прямой подсчет u_n при n = 0, 1, 2, …, 10 дает следующие значения: u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 6, u_4 = 12, u_5 = 30, u_6 = 60, u_7 = 140, u_8 = 280, u_9 = 630, u_{10} = 1260 …

Можно составить следующую таблицу:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{u_n}{n}$	0	1	1	2	3	6	10	20	35	70

Видим, что числа, стоящие во второй строчке этой таблицы, находятся в середине треугольника Паскаля. Это подсказывает нам следующую лемму.

Лемма 2.1:

$$u_n = n\binom{n-1}{[(n-1)/2]},\ n \geq 1 \tag{2.4}$$

Доказательство проведем методом математической индукции.

При n = 1 равенство (2.4) справедливо. Предположим, что утверждение леммы верно для n – 1 и докажем его справедливость для n.

Пользуемся свойствами биномиальных коэффициентов

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Пусть n четное. Тогда k = 0, 1, …, (n − 2)/2. Докажем, что

$$u_n = 2u_{n-1}$$

Имеем:

$$u_n = \sum_{2k<n}(n-2k)\binom{n}{k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}}(n-2k)\left\{\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}}(n-1-2k)\binom{n-1}{k} + \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}}\binom{n-1}{k} + \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}}(n-2k)\binom{n-1}{k-1} =$$

$$= u_{n-1} + \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}}\binom{n-1}{k} + \sum_{l=0}^{\frac{n-2}{2}}(n-2l-2)\binom{n-1}{l} =$$

$$= u_{n-1} + \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}}\binom{n-1}{k} + \sum_{l=0}^{\frac{n-2}{2}}(n-2l-2)\binom{n-1}{l} - \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}}\binom{n-1}{l} =$$

$$= 2u_{n-1} + \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}}\binom{n-1}{k} - \sum_{l=0}^{\frac{n-2}{2}}\binom{n-1}{l} =$$

$$= 2u_{n-1}$$

По предположению индукции:

$$u_{n-1} = (n-1)\binom{n-2}{(n-2)/2} =$$

$$= (n-1)\frac{(n-2)!}{\big((n-2)/2\big)!\,\big((n-2)/2\big)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{\big((n-2)/2\big)!\,\big((n-2)/2\big)!}$$

Поэтому

$$u_n = u_{n-1} = 2\frac{(n-1)!}{\left(\frac{(n-2)}{2}\right)!\left(\frac{(n-2)}{2}\right)!} = 2\frac{n}{2}\frac{(n-1)!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\,\big((n-2)/2\big)!} =$$

$$= n\frac{(n-1)!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\,\big((n-2)/2\big)!} = n\binom{n-2}{(n-2)/2} = n\binom{n-1}{[(n-2)/2]}$$

Теперь n нечетное, тогда k = 0, 1, …, (n−1)/2. Докажем, что

$$u_n = 2u_{n-1} + \binom{n-1}{(n-2)/2} \qquad (2.5)$$

Имеем:

$$u_n = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(n-2k)\binom{n}{k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(n-2k)\left\{\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} (n-1-\ 2k) \binom{n-1}{k}$$
$$+ \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-1}{k} + \sum_{l=0}^{\frac{n-3}{2}} (n-2l-2) \binom{n-1}{l} =$$
$$= u_{n-1} + \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-1}{k} + u_{n-1} - \sum_{l=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-1}{l} =$$
$$= 2u_{n-1} + \binom{n-2}{(n-2)/2}$$

Так как n нечетное, то по предложению индукции:

$$u_{n-1} = (n-1)\binom{n-2}{(n-3)/2} =$$
$$= (n-1)\frac{(n-2)!}{((n-3)/2)!\,((n-1)/2)!} =$$
$$= \frac{(n-1)!}{((n-3)/2)!\,((n-1)/2)!}$$

По доказанной формуле (2.5) получаем:

$$u_n = 2\frac{(n-1)!}{(n-3)/2)!\,((n-1)/2)!} + \frac{(n-1)!}{((n-1)/2)!\,((n-1)/2)!} =$$
$$= \frac{(n-1)!}{((n-1)/2)!\,((n-1)/2)!}\{2(n-1)/2+1\} =$$
$$= \frac{n(n-1)!}{((n-1)/2)!\,((n-1)/2)!} =$$
$$= n\binom{n-1}{(n-1)/2} = n\binom{n-1}{[(n-1)/2]}$$

Теорема 2.2. Имеем

$$M|x_n| = \frac{n}{2^{n-1}}\binom{n-1}{[(n-1)/2]} \tag{2.6}$$

Теорема вытекает из *леммы 2.1* и формулы (2.3)

Теперь найдем асимптотику $M|x_n|$ при $n \to \infty$.

Теорема 2.3. Пусть $p = q = {}^1\!/_2$. Тогда

$$M|x_n| \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{n}, \text{ при } n \to \infty \tag{2.7}$$

Доказательство. Используем формулу Стирлинга:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n . \tag{2.8}$$

Докажем (2.7) отдельно для n четного и для n нечетного.

Пусть n нечетно: $n = 2k + 1$. Тогда (2.6) имеем:

$$M|x_n| = \frac{2k+1}{2^{2k}} \cdot \frac{(2k)!}{k! \cdot k!} \sim \frac{2k+1}{2^{2k}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi 2k}(2k)^{2k}e^{2k}}{e^{2k}2\pi \cdot kk^{2k}} =$$

$$= \frac{2k+1}{\sqrt{\pi k}} \sim \frac{n}{\sqrt{\pi(n-1)/2}} \sim \frac{n}{\sqrt{\frac{\pi n}{2}}} = \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

Пусть теперь *n* четно: *n = 2k*. Тогда:

$$M|x_n| = \frac{2k}{2^{2k}} \cdot 2\binom{2k-1}{(2k-1)/2} =$$

$$= \frac{2k}{2^{2k}} \cdot 2\frac{(2k-1)}{((2k-1)/2)!\,((2k-1)/2)!} \sim$$

$$\sim \frac{2k}{2^{2k}} \cdot 2\frac{\sqrt{2\pi(2k-1)}(2k-1)^{2k-1}e^{2k-1}}{e^{2k-1}2\pi((2k-1)/2)((2k-1)/2)^{2k-1}} =$$

$$= \frac{4k \cdot \sqrt{2\pi(2k-1)}(2k-1)^{2k-1}}{2\pi(2k-1)^{2k-1}} =$$

$$= \frac{4k \cdot \sqrt{2\pi(2k-1)}}{2\pi(2k-1)} =$$

$$= \frac{4k}{\sqrt{2\pi(2k-1)}} \sim \frac{2n}{\sqrt{2\pi(2n-1)}} \sim \frac{2n}{\sqrt{2\pi n}} = \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

Таким образом, средний выигрыш лидера в случае $p = q = \frac{1}{2}$ ведет себя как $\sqrt{n}$ с коэффициентом $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

§3. Суммы степеней

Пусть два числа p и q связаны соотношением $p + q = 1$.

Обозначим $pq = v$ (3.1)

Обозначим $S_m = q^m + p^m$ (3.2)

Так как S_m – симметрическая функция от p,q, то S_m есть функция от $p + q$ и pq. Но так как $p + q = 1$, то S_m есть функция только от $v = pq$.

Напишем несколько значений S_i.

$S_0 = q^0 + p^0 = 2$

$S_1 = q^1 + p^1 = 1$

$S_2 = q^2 + p^2 = 1-2v$

$S_3 = q^3 + p^3 = 1-3v$

$S_4 = q^4 + p^4 = 1-4v+2v^2$

Составим треугольник из коэффициентов в S_i:

$$\begin{array}{cccc} & & & 2 \\ & & 1 & -2 \\ & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & \dots & \dots \end{array}$$

Теорема 3.1. Сумма S_m удовлетворяет конечно-разностному уравнению

$$S_m = S_{m-1} - vS_{m-2} \tag{3.3}$$

Доказательство. Рассмотрим разность $S_{m-1} - S_m$. Преобразуем ее так:

$$S_{m+1} - S_m = q^{m+1} - p^{m+1} - q^m + p^m =$$

$$= p^m(q\text{-}1) = -qp^m - pq^m = -pq(p^{m-1} - q^{m-1}) = -vS_n$$

Теорема 3.2. Имеет место формула

$$S_m = \sum_{2k\le m} (-1)^k \left[\binom{m-k}{k} + \binom{m-k-1}{k-1}\right] v^k =$$

$$= \sum_{2k\le m} (-1)^k m \frac{(m-k-1)!}{k!\,(m-2k)!} v^k \tag{3.4}$$

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции по m. Обозначим в S_m как S_{ml}

$$S_m = \textstyle\sum_{2k\le m} S_{ml} v^l$$

Из (3.3) вытекает, что

$$S_{ml} = S_{m-1,l} - S_{m-2,l-1} \tag{3.5}$$

Для $m = 1$ формула (3.4) справедлива. Пусть (3.4) справедлива для $S_i, j < m$. Покажем, что она справедлива для S_m.

По (3.5) и предположению имеем:

$$S_{ml} = S_{m-1l,} - S_{m-2,l-1}$$

$$(-1)^l (m-1)\frac{(m-l-2)!}{l!\,(m-1-2l)!} - (-1)^{l-1}\cdot(m-2)\frac{(m-l-2)!}{l!\,(m-1-2l)!} =$$

$$= (-1)^l \frac{(m-l-2)!}{l!\,(m-1-2l)!}\{(m-1)(m-2l) + (m-2)l\} =$$

$$= (-1)^l \frac{(m-l-2)!}{l!\,(m-2l)!}\cdot\{m(m-l-1)\} =$$

$$= (-1)^l m\cdot\frac{(m-l-1)!}{l!\,(m-2l)!}$$

§4. Средний выигрыш лидера. Фальшивая монета ($p \neq q$)

Пусть теперь $p \neq q$. Найдем $A_n = M|x_n|$.

Из (2.1) получим формулу:

$$A_n = \sum_{n>2k}(n-2k)\binom{n}{k} v^k S_{n-2k} \qquad (4.1)$$

Обозначим $B_n = A_n/n$. Это многочлен от v:

$$B_n = \sum_{n>2k} b_{n,k}\, v^k S_{n-2k}, \text{ где } b_{n,k} = \frac{(n-2k)}{n}\binom{n}{k} \qquad (4.2)$$

Напишем несколько значений B_n:

$B_1 = S_1$

$B_2 = S_2$

$B_3 = S_3 + vS_1$

$B_4 = S_4 + 2vS_2$

$B_5 = S_5 + 3vS_3 + 2v^2S_1$

$B_6 = S_6 + 4vS_4 + 5v^2S_2$

$B_7 = S_7 + 5vS_5 + 9v^2S_3 + 5S_1$

Составим треугольник из коэффициентов в B_n

				1	B_1
				1	B_2
			1	1	B_3
			1	2	B_4
		1	3	2	B_5
		1	4	5	B_6
	1	5	9	5	B_7
	1	6	14	14	B_8
1	7	20	28	14	B_9

Видим, что этот треугольник похож на треугольник Паскаля, в том смысле, что у него каждое число равно сумме чисел, над ним стоящих: $b_{nk} = b_{n-1,k} + b_{n-1,k-1}$, левая диагональ состоит из единиц, а в правом столбце в строке с номером $n = 2j + 1$ стоит число (число Каталана):

$$b_{n,\frac{n-1}{2}} = \frac{1}{n}\binom{n}{(n-1)/2} = \frac{1}{2j+1}\binom{2j+1}{j} = \frac{(2j)!}{j!(j+1)!} \qquad (4.3)$$

Найдем разность $B_{n+1} - B_n$.

Пусть n – четно. Тогда $k = 0, 1,\dots, n/2$

$$B_{n+1} - B_n = \sum_{2k\le n} b_{n+1,k} v^k S_{n+1-2k} - \sum_{2k\le n} b_{n,k} v^k S_{n-2k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \left(b_{n,k-1} + b_{n,k}\right) v^k S_{n+1-2k} - \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} b_{n,k-1}\, v^k S_{n+1-2k} +$$

$$+\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} b_{n,k}\, v^k (S_{n+1-2k} - S_{n-2k}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} b_{n,l}\, v^{l+1} S_{n-1-2l} - \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} b_{n,k}\, v^k \cdot v \cdot S_{n-1-2k} = 0$$

Пусть n – нечетно. Тогда k = 0,1,…,(n – 1)/n

$$B_{n+1} - B_n = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} b_{n+1,k}\, v^k S_{n+1-2k} - \sum_{2k\le n} b_{n,k} v^k\, S_{n-2k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} b_{n,k-1}\, v^k S_{n+1-2k} - \sum_{l=0}^{\frac{n-3}{2}} b_{n,l}\, v^{l+1} S_{n-1-2l}$$

$$- \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} b_{n,k}\, v^{k+1} S_{n-1-2k} = -b_{n,\frac{n-1}{2}} v^{\frac{n+1}{2}} S_0 =$$

$$= -2b_{n,\frac{n-1}{2}} v^{\frac{n+1}{2}},$$

а число $b_{n,(n-1)/2}$ стоит в (4.3).

Итак,

$$B_{n+1} - B_n = \begin{cases} 0, & n - \text{четное}; \\ -2\dfrac{(n-2)!}{\left((n-2)/2\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!} v^{\frac{n}{2}}, & n - \text{нечетное}. \end{cases} \qquad (4.4)$$

Из (4.4) находим асимптотику B_n. Достаточно рассмотреть $n -$ четное.

Пусть $n -$ четное, n = 2m. Представим B_n следующим образом:

$$B_n = B_1 + (B_2 - B_1) + (B_3 - B_2) + \cdots + (B_n - B_{n-1}).$$

Подставим сюда (4.4). Получим:

$$B_n = 1 - 2\frac{0!}{0!\,1!} v - 2\frac{2!}{1!\,2!} v^2 - \cdots - 2\frac{(2m-2)!}{(m-1)!\,m!} v^3.$$

С другой стороны, рассмотрим функцию $\sqrt{1-4v}$ и разложим ее в ряд по степеням v:

$$\sqrt{1-4v} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{m} (-4v)^m = \sum_{m=0}^{\infty} (-4)^m \binom{\frac{1}{2}}{m} v^m.$$

Для $m \geq 1$ коэффициент при v^m равен:

$$(-1)^m 2^{2m} \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \dots \left(\frac{1}{2} - m + 1\right)}{m!} =$$
$$= (-1)^m \cdot 2^m \frac{1 \cdot 3 \dots (2m-3)(-1)^{m-1}}{m!} =$$
$$= -2 \cdot \frac{(2m-2)!}{m!\,(m-1)!}$$

Следовательно, B_{2m} – частичная сумма степенного ряда для $\sqrt{1-4v}$.

Теорема 4.1. $\lim_{n\to\infty} B_n = \sqrt{1-4v}$.

Число $\sqrt{1-4v}$ выразим через p, q:

$$\sqrt{1-4v} = \sqrt{1-4p(1-p)} = |1-2p| = |q-p|.$$

Таким образом,

$$B_n \sim |p-q| \ (n \to \infty)$$

Тогда

$$A_n \sim n|p-q| \ (n \to \infty)$$

Теорема 4.2.

$$\mathrm{M}|x_n| \sim |p-q| \cdot n \ (n \to \infty) \qquad (4.5)$$

Таким образом, средний выигрыш лидера в случае $p \neq q$ (фальшивая монета) ведет себя как $n \cdot |p-q|$.

Список литературы

1. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1969.
2. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988.
3. *Козлов М.В.* Элементы теории вероятностей в примерах и задачах. М.: Изд-во МГУ, 1996.

Поступила в редакцию 25.01.2018 г.
Отрецензирована 01.03.2018 г.
Принята в печать 05.04.2018 г.

Информация об авторе:

Новиков Илья Юрьевич – магистрант по направлению подготовки «Математика». Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: luks.1994@mail.ru

LEADER' TASK

Novikov I.Y., Master's Degree Student on Training Direction "Mathematics". Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: luks.1994@mail.ru

Abstract. Considered the game with a coin toss, finding the mathematical expectation of winning each player, as well as the mathematical expectation of winning the leader. Examined the cases of throwing both correct and wrong (fake) coins. Drew the conclusions that the leadership in the game changes much less often than intuition suggests. No matter how long the series of throws are, it is likely that a change of leadership will not happen at all and one change of leadership is more likely than two, and two changes are more likely than three, etc.
Keywords: random walk of a particle; average win; sum of powers; mathematical expectation; Pascal triangle; binominal formula

References

1. Venttsel E.S. *Teoriya veroyatnostey* [Probability Calculus]. Moscow, Nauka Publ., 1969. (In Russian).
2. Gnedenko B.V. *Kurs teorii veroyatnostey* [Course of Probability Calculus]. Moscow, Nauka Publ., 1988. (In Russian).
3. Kozlov M.V. *Elementy teorii veroyatnostey v primerakh i zadachakh* [Elements of Probability Calculus in Examples and Problems]. Moscow, Moscow State University Publ., 1996. (In Russian).

Received 25 January 2018
Reviewed 1 March 2018
Accepted for press 5 April 2018